BAB II

TEORI PENUNJANG

2.1. Konsep Dasar Teori Antrian

Sistem antrian dapat digambarkan sebagai kedatangan pendatang-pendatang untuk dilayani dan menunggu untuk dilayani, jika pelayanan tidak segera dilaksanakan dan jika telah menunggu untuk dilayani kemudian meninggalkan sistem sesudah selesai pelayanan. Enam karakteristik dasar yang menetapkan sistem antrian antara lain, sumber masukan, pola kedatangan, pola pelayanan, disiplin antrian, kapasitas sistem dan tingkat pelayanan.

2.1.1. Sumber Masukan *(input)*

Sumber masukan adalah kumpulan orang atau barang dari mana satuan-satuan datang atau dipanggil untuk pelayanan. Kumpulan orang atau barang ini boleh berhingga atau tidak berhingga.

Dalam praktek, sumber adalah berhingga. Akan tetapi, dalam suatu populasi yang besar, sumber dianggap tidak berhinnga. Untuk keperluan analisis sering lebih mudah menggunakan sumber tidak berhingga sebagai dasar perhitungan. Dalam kebanyakan kasus sumber berhingga, satuan-satuan kembali membentuk populasi sumber begitu pelayanan sudah selesai. Untuk jumlah langganan (sumber) yang jumlahnya terbatas perhitungannya lebih sulit, karena jumlah unit dalam sistem antrian akan mempengaruhi jumlah langganan potensial di luar sistem pada setiap waktu. Bagaimanapun, asumsi jumlah yang terbatas ini tetap harus dibuat jika sumber input yang menurunkan atau menghasilkan unit-unit yang memerlukan layanan ini jelas-jelas dipengaruhi oleh jumlah unit dalam sistem antrian.

Pola statistik dari unit-unit yang memerlukan pelayanan ini harus juga ditentukan. Dalam hal ini, asumsi yang bisa digunakan adalah unit-unit ini mengikuti proses Poisson, artinya sampai suatu waktu tertentu jumlah unit yang diturunkan ini mempunyai distribusi Poisson. Ini adalah suatu kasus dimana kedatangan pada sistem antrian terjadi secara acak atau random, tetapi dengan tingkat rata-rata tertentu. Asumsi berikutnya adalah bahwa distribusi kemungkinan dari waktu antar kedatangan *(inter-arrival time)* adalah distribusi eksponensial. Suatu peristiwa dikatakan mengikuti proses poisson apabila peristiwa itu memenuhi asumsi sebagai berikut :

1. Suatu peristiwa dapat terjadi secara acak dan pada waktu atau titik dalam ruang yang mana saja.
2. Kejadian suatu peristiwa pada suatu selang waktu (tempat) yang tertentu adalah bebas dengan peristiwa yang terjadi pada selang lain yang tidak tumpang tindih.
3. Probabilitas terjadinya suatu peristiwa di suatu selang waktu yang kecil adalah sebanding dengan (Δt) dan dapat dituliskan sebagai $\lambda\ \Delta t$, dimana λ adalah tingkat rata-rata dari terjadinya peristiwa dan probabilitas dari dua kejadian atau lebih di dalam Δt dapat diabaikan.

2.1.2. Pola Kedatangan

Pola kedatangan merupakan suatu distribusi dari suatu rata-rata laju kedatangan yaitu rata-rata jumlah kedatangan per sejumlah unit waktu atau rata-rata waktu antar kedatangan. Salah satu faktor penting dari pola kedatangan yaitu kemungkinan bahwa pelanggan masuk ke dalam sistem lebih dari satu pada suatu waktu. Di dalam hal ini masukan *(input)* ini dikatakan terjadi dalam distribusi Poisson, yaitu masukan ke dalam suatu sistem dengan kedatangan satu per satu.

2.1.3. Pola Pelayanan

Pola pelayanan merupakan suatu distribusi dari suatu rata-rata pelayanan, yaitu rata-rata jumlah pelanggan yang dilayani per sejumlah unit waktu, atau sebagai waktu yang dibutuhkan untuk melayani seorang pelanggan.

Ada tiga aspek yang mempengaruhi dalam meknisme pola pelayanan yaitu tersedianya pelayanan, kapasitas pelayanan dan waktu pelayanan. Ketiganya merupakan variabel bebas dan boleh jadi sudah tetap atau mungkin tidak. Ketiga-tiganya dapat dibedakan sebagai berikut :

2.1.3.1. Tersedianya Pelayanan

Mekanisme pelayanan tidak selalu tersedia untuk setiap saat. Misalnya dalam pertunjukan bioskop, loket penjualan karcis masuk hanya dibuka pada waktu tertentu antara satu pertunjukan dengan pertunjukan berikutnya. Sehingga pada saat loket ditutup, mekanisme pelayanan terhenti dan petugas pelayanan (pelayan) istirahat.

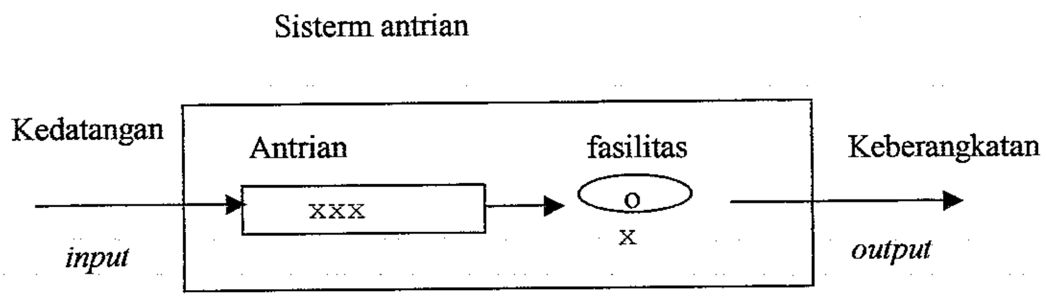
2.1.3.2. Kapasitas Pelayanan

Kapasitas dari mekanisme pelayanan diukur berdasarkan jumlah langganan (satuan) yang dapat dilayani secara bersama-sama. Kapasitas pelayanan tidak selalu sama, untuk setiap saat ada yang tetap, tapi ada juga yang berubah-ubah. Karena itu, fasilitas pelayanan dapat memiliki satu atau lebih saluran. Fasilitas yang mempunyai saluran satu disebut saluran tunggal atau sistem pelayanan tunggal dan fasilitas yang mempuyai lebih dari satu saluran disebut saluran ganda atau pelayanan ganda.

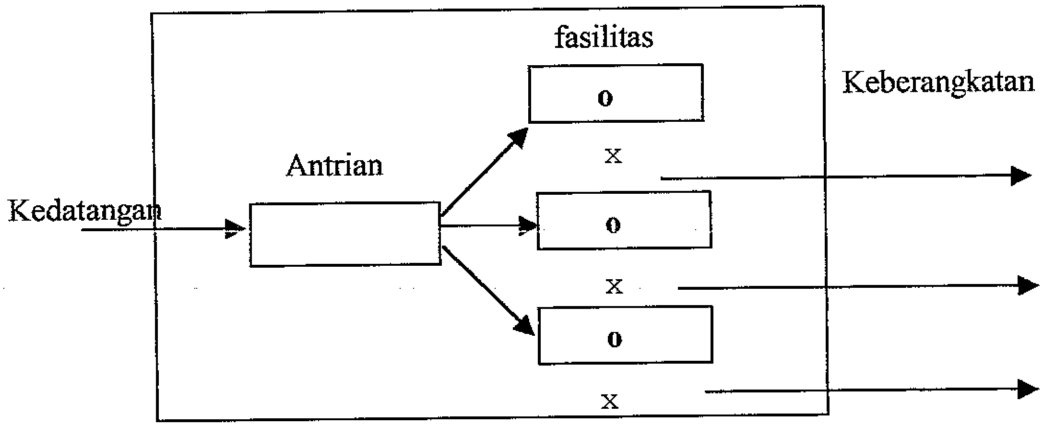
2.1.3.3. Waktu Pelayanan

Waktu pelayanan adalah waktu yang dibutuhkan untuk melayani seorang langganan atau satu-satuan. Ini harus dinyatakan secara pasti. Oleh karena itu, waktu pelayanan boleh tetap dari waktu ke waktu untuk semua langganan atau boleh juga berupa variabel acak. Umumnya dan untuk keperluan analisis, waktu pelayanan diangap sebagai variabel acak yang terpencar secara bebas dan sama dan tidak tergantung pada waktu kedatangan.

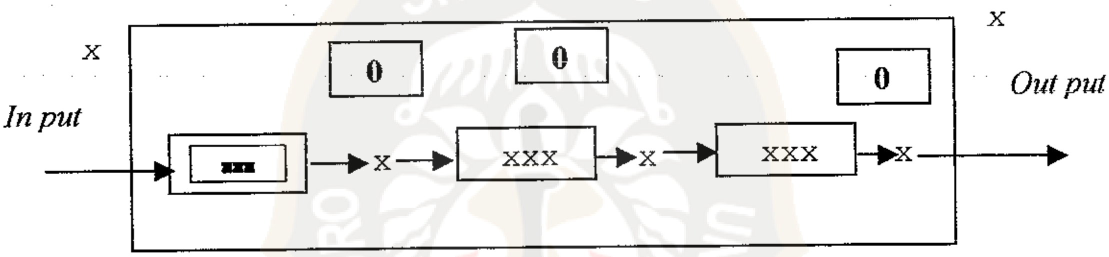
Berdasarkan ketiga sifat ini dapat dibuat bermacam-macam bentuk sistem antrian, diantaranya:



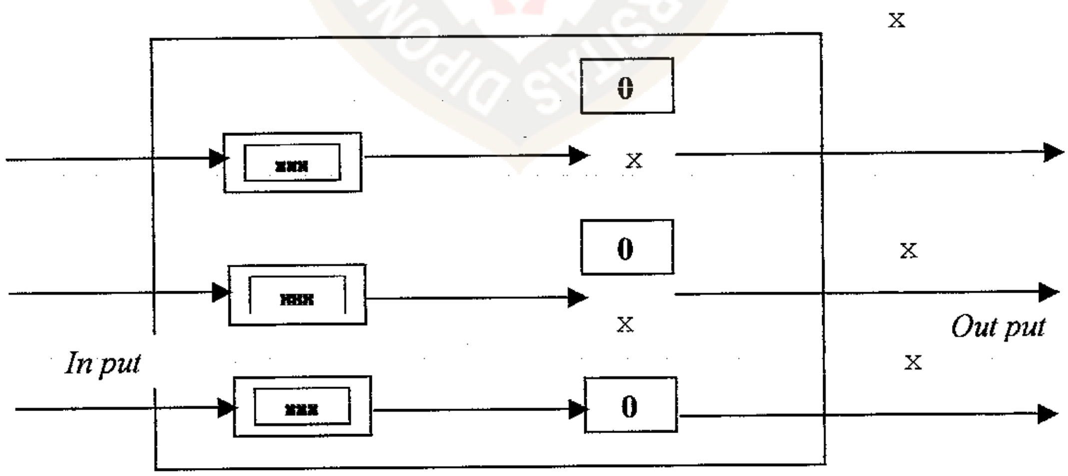
Gambar (2.1.) antrian tunggal, pelayanan tunggal



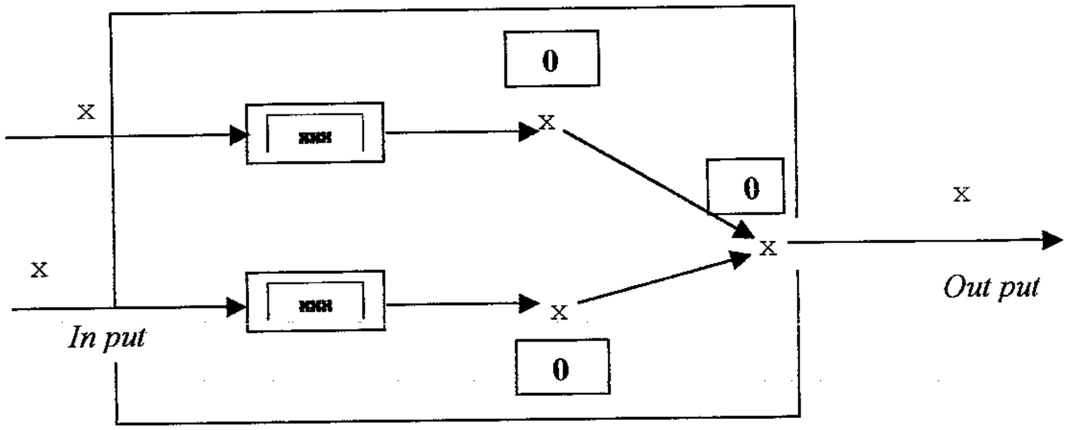
Gambar (2.2.) antrian tunggal, pelayanan ganda sejajar



Gambar (2.3.) antrian tunggal, pelayanan ganda dalam seri



Gambar (2.4.) antrian ganda, pelayanan ganda



Gambar (2.5.) antrian ganda, pelayanan tunggal

2.1.4. Disiplin Antrian

Kebiasaan ataupun kebijakan dalam memilih konsumen dalam antrian untuk dilayani, disebut disiplin pelayanan. Ada lima bentuk disiplin pelayanan yang biasa digunakan dalam praktek, yaitu :

1. *First come first serve (FCFS)* atau *first-in first out (FIFO)* artinya, lebih dulu datang (sampai) lebih dulu dilayani. Misalnya antri membeli tiket bioskop.
2. *Last come first served (LCFS)* atau *last-in first-out (LIFO)*, artinya yang datang terakhir yang lebih dulu keluar. Misalnya, sistem antrian dalam elevator *(lift)* untuk lantai yang sama.
3. *Service in random order (SIRO)* artinya, panggilan didasarkan pada peluang secara random, tidak soal yang lebih dulu datang.
4. *Priority service (PS)* artinya, prioritas pelayanan diberikan kepada mereka yang mempunyai prioritas lebih tinggi

dibandingkan dengan mereka yang mempunyai prioritas lebih rendah, meskipun yang terakhir ini kemungkinan sudah lebih dahulu datang dalam garis tunggu. Kejadian seperti ini kemungkinan disebabkan oleh beberapa hal, misalnya seorang keadaan penyakit yang lebih berat dibanding dengan orang lain dalam suatu tempat praktek dokter. Mungkin juga karena kedudukan atau jabatan seseorang menyebabkan dia dipanggil terlebih dahulu atau diberi prioritas lebih tinggi. Demikian juga bagi seorang yang menggunakan waktu pelayanan yang lebih sedikit diberi prioritas dibanding dengan mereka yang memerlukan pelayanan lebih lama, tidak soal siapa yang lebih dahulu masuk dalam garis tunggu. Contoh-contoh di atas merupakan sebagian kecil dari *priority service* yang sering dijumpai dalam keadaan yang sesungguhnya.

2.1.5. Kapasitas Sistem

Kapasitas sistem adalah batasan fisik terhadap jumlah pelanggan di suatu sistem antrian ditambah dengan pelanggan yang sedang menerima pelayanan. Dengan adanya kapasitas sistem antrian maka di saat sistem antrian mencapai panjang tertentu untuk selanjutnya tidak ada lagi pelanggan diijinkan masuk sampai ruangan siap bagi suatu penyelesaian pelayanan.

2.1.6. Tingkat Pelayanan

Tingkat pelayanan merupakan tahap-tahap untuk melaksanakan suatu pelayanan di dalam suatu sistem antrian. Tingkat pelayanan dapat merupakan tingkat pelayanan tunggal (*single stage*) atau pelayanan ganda (*multi stage*).

2.2. Terminologi dan Notasi

Terminologi dan notasi yang digunakan adalah sebagai berikut : keadaan sistem, jumlah langganan (*unit*) dalam sistem, panjang antrian, jumlah langganan (*unit*) yang menunggu pelayanan sama dengan jumlah langganan dalam sistem dikurangi dengan jumlah unit yang sedang dilayani.

E_n : keadaan dimana ada n kedatangan (*calling unit*) pada sistem antrian

$P_n(t)$: kemungkinan bahwa ada tepat n kedatangan pada sistem antrian pada saat t

s : jumlah pelayan (untuk saluran pelayanan paralel) pada sistem antrian

λ_n : tingkat kedatangan rata-rata (ekspektasi jumlah kedatangan per satuan waktu) dari kedatangan baru jika ada n unit dalam sistem

μ_n : tingkat pelayanan rata-rata (ekspektasi jumah unit yang selesai dilayani per satuan waktu) jika ada n unit dalam sistem

jika λ_n adalah konstan untuk semua n, maka dapat ditulis sebagai λ. Jika μ_n konstan untuk semua $n \geq 1$, maka dapat ditulis μ. Disini $\mu_n = s\mu$ jika $n \geq s$ sehingga seluruh pelayan (sejumlah s) sibuk. Dalam hal ini $1/\lambda$ menyatakan ekspektasi waktu diantara kedatangan, sedangkan $1/\mu$ menyatakan ekspektasi waktu pelayanan.

$\rho = \lambda / s\mu$ adalah faktor penggunaan *(utilisasi)* untuk fasilitas pelayanan, yaitu ekspektasi perbandingan dari waktu sibuk para pelayan.

Jika suatu sistem antrian telah mulai berjalan, keadaan sistem (jumlah unit dalam sistem) akan sangat dipengaruhi oleh keadaan *(state)* awal dan waktu yang telah dilalui. Dalam keadaan seperti ini, sistem dikatakan dalam kondisi transient. Tetapi, lama-kelamaan keadaan sistem akan independen terhadap keadaan awal tersebut, dan juga terhadap waktu yang dilaluinya. Keadaan sistem seperti ini dikatakan berada dalam kondisi mantap (*steady-state*). Teori antrian cenderung memusatkan pada kondisi mantap (*steady-state*), sebab kondisi transien lebih sulit untuk dianalisis.

Notasi-notasi berikut ini digunakan untuk sistem dalam keadaan kondisi mantap :

L : ekspektasi panjang garis (jumlah pelanggan dalam sistem)

L_q : ekspektasi panjang antrian (jumlah pelanggan dalam antrian)

W : ekspektasi waktu menunggu dalam sistem (termasuk waktu pelayanan)

W_q : ekspektasi waktu menunggu dalam antrian (tidak termasuk waktu pelayanan)

2.2.1. Hubungan antara *L* dan *W*

Asumsikan bahwa λ_n adalah konstan untuk semua n sehingga cukup ditulis λ. Maka dalam proses antrian yang mantap didapat ;

$$L = \lambda W \qquad \text{dan} \qquad L_q = \lambda W_q$$

Misalkan diasumsikan waktu pelayanan rata-rata adalah konstan untuk semua $n \geq 1$ sehingga cukup ditulis $1/\mu$,sehingga diperoleh :

$$W = W_q + 1/\mu$$ jika dikalikan dengan λ, didapatkan

$$L = L_q + \rho$$

2.3. Fungsi Distribusi

Fungsi distribusi yang akan digunakan dalam teori antrian prosess kelahiran dan kematian (*birth and death*) yaitu fungsi distribusi poisson, distribusi eksponensial dan distribusi gamma.

2.3.1. Distribusi Poisson

Distribusi Poisson adalah distribusi kemungkinan dari variabel random Poisson *n*, yang menentukan jumlah kedatangan atau jumlah pelayanan yang terjadi dalam interval waktu tertentu dinotasikan sebagai :

$$P_n = \begin{cases} e^{-\lambda} . \dfrac{\lambda^n}{n!} & untuk \quad n \; = 0,1,2.. \ldots \\ 0 & ,untuk \quad n \quad yang\ lain \end{cases}$$

Sedangkan nilai ekspektasi dan varian dari N adalah :

$$E(N) = \lambda \qquad \text{dan} \qquad Var(N) = \lambda$$

2.2.2. Distribusi Eksponensial

Misal X adalah suatu variabel random yang menentukan waktu antar kedatangan atau waktu pelayanan. Maka X disebut mempunyai suatu distribusi Exponensial dengan parameter μ jika fungsi probabilitas densitasnya adalah :

$$f(x) = \begin{cases} \mu e^{-\mu x} & ,untuk \quad x \geq 0 \\ 0 & ,untuk \quad x < 0 \end{cases} \qquad \text{,dimana } \mu > 0$$

Sedangkan nilai ekspektasi dan varian untuk X adalah :

$$E(X) = \frac{1}{\mu} \qquad \text{dan} \qquad Var(X) = \frac{1}{\mu^2}$$

2.3.3. Distribusi Gamma

Misal $X_1, X_2, \ldots, X_K$ adalah k variabel-variabel random atau waktu pelayanan yang berdistribusikan eksponensial dengan parameter μ.

Maka $\sum_{i=1}^{k} X_i$ mempunyai distribusi Gamma dengan $\alpha = n$ dan $\beta = 1/\mu$,

maka mempunyai fungsi probabilitas densitas berbentuk :

$$f(x) = \frac{\mu^k}{(k-1)!} x^{k-1} . e^{\mu x} \qquad (t \geq 0)$$

Dimana μ dan k adalah parameter positif. Fungsi distribusi ini akan digunakan untuk mencari distribusi waktu tunggu komulatif dari sistem antrian menurut proses kelahiran dan kematian (*Birth and Death*). Sedangkan nilai ekspektasi dan varian untuk X adalah :

$$E(X)=\frac{1}{\mu} \qquad \text{dan} \qquad Var(X)=\frac{k}{\mu^2}$$

2.4. Fungsi Pembangkit

Fungsi pembangkit disini akan digunakan dalam mencari probabiitas adanya n pelanggan dalam sistem, yang didefinisikan sebagai berikut :

Definisi 1.

Jika $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ adalah barisan bilangan riil dan jika A(z) = $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ada, maka A(z) disebut fungsi pembangkit dari barisan $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Sifat-sifat fungsi pembangkit :

Diberikan fungsi pembangkit dari $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ dan $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$, maka :

a. Jika $C_n = k_1\, a_n + k_2\, b_n$ untuk setiap n, dimana k_1 dan k_2 adalah konstanta, maka :

$$C(z)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n = k_1 A(z) + k_2 B(z)$$

__Bukti :__

$$C(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(k_1a_n+k_2b_n)z^n=\sum_{n=0}^{\infty}k_1a_nz^n+k_2b_nz^n$$

$$=k_1\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n+k_2\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n$$

$$=k_1\,A(z)+k_2\,B(z)$$

b. Jika $b_n = a_{n+k}$ maka $B(z)=z^{-k}A(z)-\sum_{n=0}^{k-1}a_nz^{n-k}$

__Bukti :__

$$B(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n \quad =\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+k}z^n \quad =z^{-k}\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+k}z^{n+k}$$

$$=z^{-k}\left[\sum_{n=-k}^{\infty}a_{n+k}z^{n+k}-\sum_{n=0}^{k-1}a_nz^n\right]$$

$$=z^{-k}A(Z)-\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^{n-k}$$

C. Jika $a_n = n^k$ dan $b_n = n^{k-1}$ untuk $k\geq 1$, maka

$$A(z)=zB'(z) \quad =z\frac{d}{dz}B(z)$$

__Bukti :__

$$A(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n=\sum_{n=0}^{\infty}n^kz^n=\sum_{n=1}^{\infty}n^kz^n=z\sum_{n=1}^{\infty}n^kz^{n-1}$$

karena $B(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \quad = \sum_{n=0}^{\infty} n^{k-1} z^n$

dan $\quad B'(z)=\sum_{n=1}^{\infty} n n^{k-1} z^{n-1} \quad = \sum_{n=1}^{\infty} n^k z^{n-1}$

Sehinga $\quad A(z)=zB'(z) \quad = z\frac{d}{dz}B(z)$

d. Jika $C_n=\sum_{r=0}^{n} arb_{n-r}$ maka $C(z)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n = A(z)B(z)$

<u>*Bukti :*</u>

$$C(z)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{n} a_r b_{n-r} z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{n} a_r b_{n-r} z^r z^{n-r}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{n} a_r z^r b_{n-r} \; z^{n-r} = \sum_{r=0}^{n}\sum_{n=0}^{\infty} a_r z^r b_{n-r} \; z^{n-r}$$

$$= \sum_{r=0}^{n} a_r z^r \sum_{n=0}^{\infty} b_{n-r} z^{n-r} \quad = A(z)B(z)$$

Catatan ; $\quad \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty} = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{n=r}^{\infty}$

Fungsi pembangkit dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan differensial ,yaitu dengan menjabarkan ekspansi deretnya dan kemudian mendapatkan koefisien-koefisien $\{a_n\}$.

Contoh 2.1 :

Tentukan f_n dimana ;

$f_{n+2} - 2f_{n+1} + f_n = a$, (n= 1, 2, 3, ...) dan dengan syarat batas $f_0 = f_1 = 0$

Penyelesaian ;

Pertama kalikan seluruh suku dengan z^n dan kemudian dijumlahkan dari 0 sampai ∞ dan diperoleh :

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_{n+2} z^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a\ z^n$$

$$z^{-2}\sum_{n=0}^{\infty} f_{n+2} z^{n-2} - 2z^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1} z^{n+1} + F(z) = \frac{a}{1-z}$$

$$z^{-2}[F(z) - f_1 z - f_0] - 2z^{-1}[F(z) - f_0] + F(z) = \frac{a}{1-z}$$

Gunakan syarat batas, kemudian diperoleh bahwa :

$$z^{-2}F(z) - 2z^{-1}F(z) + F(z) = \frac{a}{1-z}$$

$$F(z)\{z^{-2} - 2z^{-1} + 1\} = \frac{a}{1-z}$$

$$F(z) = \frac{a}{(1-z)(z^{-2} - 2z^{-1} + 1)} = \frac{a}{(1-z)z^{-2}(z - 2z + z^2)} = \frac{aZ^2}{(1-z)(1-Z)^2}$$

$$= \frac{az^2}{(1-z)^3}$$

Kemudian diekspansikan sisi kanan ke persamaan tersebut dalam deret pangkat untuk memperoleh koefisien-koefisiennya yaitu, (f_i)

Diketahui deret Geometri yang diberikan oleh ;

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \quad \text{untuk } 0<z<1$$

Kemudian ambil derivatif kedua dari dua sisinya sehingga diperoleh

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)z^{n-2} = \frac{2}{(1-z)^3}$$

oleh karena itu

$$F(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{az^2}{2} n(n-1)z^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{an(n-1)}{2} z^n$$

maka diperoleh koefisien dari dari z^n yaitu $\left(\frac{an(n-1)}{2}\right)$ oleh karena itu

$$f_n = \frac{an(n-1)}{2}$$

2.4.1. Fungsi Pembangkit probabilitas

Definisi 2

Jika f_n adalah suatu distribusi probabilitas dari variabel random non negatif diskrit sehingga $P\{N = n\} = f_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$maka

Probabilitas $F(z)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$ disebut fungsi pembangkit probabilitas karena fungsi pembangkit ini membentuk probabilitas $\{f_n\}$.

Selanjutnya dari $F(z)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$ maka

$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty} P(N=n) z^n = E[z^n]$ dengan $E[Z^n]$ adalah ekspektasi dari fungsi z^n dari varian random N kemudian didapatkan bahwa $F(1)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ dari $F(z)$ yang diberikan dari derivativ I dan derivativ II

$F'(z)=\sum_{n=0}^{\infty} n f_n z^{n-1}$ dan

$F''(z)=\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) f_n z^{n-2}$ maka ekspektasi $E(N)$ disajikan sebagai

$E(N)=\sum_{n=0}^{\infty} n f_n \; = F'(1)$ oleh karena itu

$E[N(N-1)]=\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) f_n \; = F''(1)$ maka

$$E[N^2]=E[N(N-1)]+E[N]$$

$$= F''(1)+F'(1)$$

Sehingga varian N disajikan sebagai

$$Var[N] = E[N^2] - [E(N)]^2$$

$$= F''(1) + F'(1) - [F'(1)]^2$$

Contoh 2.2 :

Andaikan diketahui fungsi pembangkit probabilitas sebagai berikut

$F(z) = e^{-\lambda} e^{\lambda z}$ maka tentukanlah Mean, Varian dan distribusi probabilitasnya .

Penyelesaian

Mean μ dalam fungsi pembangkit probabilitas diperoleh sebagai

$$\mu = F'(z) = e^{-\lambda} \lambda e^{\lambda Z} \Big|_{z=1}$$

$$= e^{-\lambda} \lambda e^{\lambda} = \lambda$$

Sedangkan untuk menemukan variannya digunakan differensial kedua

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) f_n = \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 f_n - n f_n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n^2 f_n - \sum_{n=0}^{\infty} n f_n = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 f_n - \mu$$

Sehingga varian σ^2 dapat diberikan sebagai

$$\sigma^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 f_n - \mu^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\ f_n + \mu - \mu^2 \quad = F''(1) + \mu - \mu^2$$

$$= \left[e^{-\lambda}\lambda^2 e^{\lambda z}\right]_{z=1} + \lambda - \lambda^2 \quad = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

untuk mendapatkan distribusi probabilitas sepenuhnya disini dapat dengan cara menemukan ekspansi deret pangkat *F(z)* , yaitu :

$$F(z) = e^{-\lambda} e^{\lambda z} = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda z)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{(\lambda z)^n}{n!}$$

oleh karena itu koefisien dari z^n adalah $\dfrac{e^{\lambda}\lambda^n}{n!}$ maka $f_n = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}$ merupakan suatu distribusi poisson.

2.5. Proses Kelahiran dan Kematian (*Birth and Death*)

Kebanyakan model dasar antrian menganggap bahwa unit kedatangan *(input)* dan unit keberangkatan (*output*) dari sistem antrian terjadi menurut proses *(Birth and Death).* Proses kelahiran dan kematian terjadi secara random yang rata-rata terjadinya hanya bergantung pada keadaan yang sedang berlangsung *(current state)* dari sistem (jumlah kedatangan dalam sistem antrian). Keadaan yang sedang berlangsug tersebut adalah sebagai berikut :

1. *Birth Postulate*

Sistem pada keadaan E_n (n= 0, 1, 2, ...) pada saat t, kemungkinan bahwa tepat ada satu kelahiran selama waktu interval t dan ($t + \Delta t$) adalah $[\lambda_n \Delta t + 0(\Delta t)]$, dimana λ_n adalah positif konstan.

2. *Death postulate*

Sistem pada keadaan E_n ($n = 0, 1, 2, \ldots$) pada saat t, kemungkinan bahwa tepat ada satu kamatian selama waktu interval t dan ($t + \Delta t$) adalah $[\mu_n \Delta t + 0(\Delta t)]$, dimana $\mu_0 = 0$ dan μ_n adalah positif konstan untuk $n > 0$.

3. *Multiple jump postulate*

Sistem pada keadaan E_n ($n = 0, 1, 2, \ldots$) pada saat t, kemungkinan bahwa jumlah kombinasi kelahiran dan kematian lebih dari satu selama waktu interval t sampai dengan ($t + \Delta t$) adalah $[0(\Delta t)]$.

$[0(\Delta t)]$ adalah fungsi dari Δt yang karena Δt <<< (sangat kecil, mendekati nol), maka fungsi tersebut akan memenuhi persamaan :

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{0(\Delta t)}{\Delta t} = 0$$

Sebagai akibat dari *postulate* tiga, maka *postulate* satu, akan tetap berlaku walaupun kalimat " tepat ada satu kelahiran " diganti dengan kalimat "tepat ada satu kelahiran dan tanpa ada kematian ". " Tepat ada satu kematian " diganti dengan "tepat ada satu kematian dan tanpa kelahiran ".

selama waktu interval t sampai dengan ($t + \Delta t$) harus terjadi salah satu dari kejadian sebagai berikut :

1.- ada n satuan dalam antrian pada waktu $t = P_n(t)$

- tidak ada kedatangan selama waktu $\Delta t = 1 - \lambda \Delta t$
- tidak ada satuan yang dilayani selama waktu $\Delta t = 1 - \mu \Delta t$

2.- ada $(n+1)$ satuan dalam antrian pada waktu $t = P_{n+1}(t)$

- tidak ada kedatangan selama waktu $\Delta t = 1 - \lambda \Delta t$
- ada satu satuan yang dilayani selama waktu $\Delta t = \mu \Delta t$

3. – ada $(n-1)$ satuan dalam antrian pada waktu $t = P_{n-1}(t)$

- ada kedatangan satu satuan dalam antrian pada waktu $\Delta t = \lambda \Delta t$
- tidak ada satuan yang dilayani selama waktu $\Delta t = 1 - \mu \Delta t$

4.- ada n satuan dalam antrian pada waktu $t = P_n(t)$

- ada kedatangan satu satuan dalam antrian pada waktu $\Delta t = \lambda \Delta t$
- ada satu satuan yangn dilayani selama waktu $\Delta t = \mu \Delta t$

Berdasarkan empat kemungkinan di atas, maka peluang ada n satuan dalam antrian pada waktu $(t + \Delta t)$ yaitu $P_n(t + \Delta t)$ dengan asumsi bahwa peluang kedatangan dan peluang pelayanan lebih dari satu satuan dalam waktu Δt dianggap sama dengan nol, ialah :

$$P_n(t+\Delta t) = P_n(t)(1-\lambda\Delta t)(1-\mu\Delta t) + P_{n+1}(t)(\mu\Delta t)(1-\lambda\Delta t) + P_{n-1}(t)(\lambda\Delta t)(1-\mu\Delta t) + P_n(t)(\lambda\Delta t)(\mu\Delta t)$$

$$P_n(t+\Delta t) = P_n(t) - (\lambda+\mu)\Delta t.P_n(t) + \mu.\Delta t.P_{n+1}(t) + \lambda\Delta t P_{n-1}(t) + \sum_{i=1}^{4} 0i.\Delta t \qquad \ldots(2.3.)$$

dimana 0_i adalah faktor yang mengandung Δt, karena itu :

$$\frac{P_n(t+\Delta t)-P_n(t)}{\Delta t}=\lambda P_{n-1}(t)-(\lambda+\mu)P_n(t)+\mu P_{n+1}(t)+\sum_{i=1}^{4}0i.\Delta t\ ,$$

dan untuk $\Delta t \to 0$, terdapat $\sum_{i=1}^{n} 0i.\Delta t \to 0$, sehingga :

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P_n(t+\Delta t)-P_n(t)}{\Delta t}=\frac{dP_n(t)}{dt}=\lambda P_{n-1}(t)+(\lambda+\mu)P_n(t)+\mu P_{n+1}(t)$$

Untuk $n = 0$ maka diperoleh :

$$P_0(t+\Delta t)=P_0(t)(1-\lambda\Delta t)+P_1(t)(\mu\Delta t)(1-\lambda\Delta t)$$

Jika limit $\Delta t \to 0$ maka $(\Delta t)^2$ dapat diabaikan dan turunan persamaan differensi didapat dengan cara membagi dengan Δt sehingga diperoleh:

$$\frac{Po(t+\Delta t)-Po(t)}{\Delta t}=\mu P_1(t)-\lambda Po(t)-\lambda\mu P_1(t)\Delta t$$

untuk $\Delta t \to 0$, diperoleh:

$$\frac{dPo(t)}{dt}=\mu P_1(t)-\lambda Po(t) \qquad \ldots\ldots(2.4)$$

Di dalam teori antrian kelahiran dan kematian (*birth and death*), kelahiran (*birth*) menunjukkan pada kedatangan seorang pelanggan baru di dalam sistem antrian dan kematian (*death*) menunjuk pada keberangkatan pelanggan yang telah selesai dilayani.

Keadaan suatu sistem pada saat *t*, *n* merupakan jumlah pelanggan di dalam sistem antrian pada saat *t*. Proses kelahiran dan kematian ini menggambarkan secara probabilistik bagaimana E_n berubah bersamaan dengan kenaikan t dengan kelahiran dan kematian terjadi secara random.

Perhatikan probabilitas *state* $P_n(t) = P$ {state proses yaitu E_n pada saat t }, untuk sembarang proses kelahiran dan kematian. Proses ini merupakan suatu proses dimana perubahan seketika di dalam sistem *state* hanya disebabkan adanya satu kelahiran *(birth)* dan satu kematian *(death)*. Probabilitas terjadinya satu kelahiran dalam interval kecil sepanjang Δt yang berawal dengan sistem di dalam *state* E_n. Model antrian kelahiran dan kematian adalah model antrian dua *state* E_0 dan *state* E_1 dimana ;

E_0 : adalah *state* pelayanan nganggur atau pelayanan kosong

E_1 : adalah *state* pelayanan sibuk

Pada *state* E_0, tidak ada langganan menunggu atau didalam pelayanan, sedangkan rata-rata (*mean*) banyaknya permintaan pelayanan adalah λ. Jadi pada *state* E_0 ini laju kedatangan $\lambda_0 = \lambda$ dan $\lambda_j = 0$ untuk $j \neq 0$.

Kedatangan seorang langganan pada *state* E_0 mengakibatkan ada seorang langganan menunggu (berada di dalam *state* E_1). Sedangkan rata-rata (*mean*) banyaknya langganan $= \mu$. Pada *state* E_1 laju keberngkatan $\mu_1 = \mu$ dan $\mu_j = 0$ untuk j $\neq 0$. Setelah langganan selesai dilayani, tidak ada langganan lagi di dalam sistem yang menunggu atau sistem kembali ke E_0, demikian seterusnya. Syarat yang sesuai untuk model antrian kelahiran dan kematian dua keadaan adalah $\lambda_0 = \lambda$ dan $\lambda_j = 0$ untuk $j \neq 0$ dan laju keberangkatan $\mu_1 = \mu = \mu_j = 0$ untuk $\lambda_0 = \lambda$ dan $\lambda_j = 0$ untuk $j \neq 1$. Apabila yang dipandang ada keadaan E_1 dan E_2, dimana diandaikan keadaan E_1 adalah keadaan dua orang pelayanan sibuk, maka pada saat

t keadaan di E_1 berarti ada seorang menunggu. Banyaknya pelayanan = λ. Laju kedatangan $\lambda_1 = \lambda$; $\lambda_j = 0$ untuk j $\neq$ 1. kedatangan seorang di E_1 mengakibatkan dua orang menunggu di E_2, maka banyaknya langganan = μ. Laju keberangkatan $\mu_2 = 2\mu$ dan $\mu_j = 0$.

Pada model antrian dua keadaan misalnya dipandang sebagai keadaan E_1 dan keadaan E_2 maka dapat diperoleh suatu persamaan sebagai berikut ;

$$\frac{d}{dt}P_n(t) = \lambda_{n-1}\,P_{n-1}(t) + \mu_{n+1}\,P_{n+1}(t) - (\lambda_n + \mu_n)P_n(t) \qquad \text{.......(2.5.)}$$

untuk n =1, 2, 3, ... $\quad \mu_0 = \lambda_{-1} = P_{-1}(t) = 0 \quad \Delta t \to 0$

untuk $j = 0$

$$\frac{d}{dt}P_0(t) = \lambda_{-1}\,P_{-1}(t) + \mu_1\,P_1(t) - (\lambda_0 + \mu_0)P_0(t)$$

$$\frac{d}{dt}P_0(t) = \mu P_1(t) - (\lambda + 0)P_0(t)$$

$$\frac{d}{dt}P_0(t) = \mu P_1(t) - \lambda P_0(t) \qquad \text{....(2.6.)}$$

untuk $j = 1$

$$\frac{d}{dt}P_1(t) = \lambda_0\,P_0(t) + \mu_2\,P_2(t) - (\lambda_1 + \mu_1)P_1(t)$$

$$\frac{d}{dt}P_1(t) = \lambda\;P_0(t) + 0.P_2(t) - (0 + \mu)P_1(t)$$

$$\frac{d}{dt}P_1(t) = \lambda\;P_0(t) - \mu P_1(t) \qquad \text{.........(2.7.)}$$

Jika kedua persamaan (2.6.) dan persamaan (2.7.) dijumlah maka akan diperoleh :

$$\frac{d}{dt}\left(P_0(t)+P_1(t)\right)=0 \qquad \ldots\ldots(2.8.)$$

sehingga didapatkan suatu solusi sebagai berikut ;

$P_0(t)+P_1(t)=k$ dimana k adalah konstan.

Padahal syarat awal suatu probabilitas pada saat $t = 0$ adalah

$P_0(0)+P_1(0)=1$ untuk suatu nilai $t \geq 0$, maka

$P_0(t)+P_1(t)=1$ atau $P_1(t)=1-P_0(t)$

sehingga apabila disubstitusikan ke persamaan (2.6.) diperoleh persamaan baru sebagai berikut

$$\frac{d}{dt}P_0(t)=\mu(1-P_0(t))-\lambda\, P_0(t)$$

$$\frac{d}{dt}P_0(t)+(\lambda+\mu)P_0(t)=\mu \qquad \ldots\ldots.(2.9.)$$

$P_0(t)$ dapat diselesaikan dengan cara penyelesaian persamaan differensial linear yang tidak homogen, dimana penyelesaiannya terdiri dari penyelesaian komplementer dan penyelesaian partikuler

i. Penyelesaian komplementer

$P_0(t) = k.e^{-(\lambda+\mu)t}$, k adalah konstanta, misalkan k adalah

$k = P_0(0)$, maka $P_0(t) = P_0(0).e^{-(\lambda+\mu)t}$

ii. Penyelesaian partikuler

$$P_0(t) = e^{-(\lambda+\mu)t}\int \mu e^{(\lambda+\mu)t}dt \qquad = \frac{\mu}{\lambda+\mu}\left(1-e^{-(\lambda+\mu)t}\right)$$

Jadi penyelesaian umumnya adalah :

$$P_0(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu}\left(1-e^{-(\lambda+\mu)t}\right) + P_0(0).e^{-(\lambda+\mu)t}$$

$$P_0(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \left(P_0(0) - \frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)\left(e^{-(\lambda+\mu)t}\right) \qquad \text{.....(2.10.)}$$

sedangkan untuk persamaan P_1 dapat diselesaikan dengan cara sebagai berikut ;

$P_0(t) + P_1(t) = 1$ disubstitusikan ke persamaan (2.7.)

$\frac{d}{dt}P_1(t) = \lambda\ P_0(t) - \mu P_1(t)$, sehingga didapatkan suatu persamaan baru sebagai berikut ;

$$\frac{d}{dt}P_1(t) = \lambda\ (1 - P_1(t)) - \mu P_1(t) \text{ , atau ditulis dengan}$$

$\frac{d}{dt}P_1(t)+(\lambda+\mu)P_0(t)=\lambda$, sehingga persamaan ini dapat diselesaikan dengan cara yang sama dengan penyelesaian persamaan (2.9.) atau analog sehingga didapatkan persamaan sebagai berikut :

$$P_1(t)=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}+\left(P_1(0)-\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)\left(e^{-(\lambda+\mu)t}\right) \qquad \text{.....(2.11.)}$$

jika persamaan (2.10.) dan persamaan (2.11.) diambil limitnya akan diperoleh suatu nilai sebagai berikut :

$$\lim_{t\to\infty} P_0(t)=\frac{\mu}{\lambda+\mu}=P_0 \qquad \text{......(2.12.)}$$

$$\lim_{t\to\infty} P_1(t)=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}=P_1 \qquad \text{......(2.13.)}$$

atau dapat ditulis sebagai $P_0=\frac{\mu}{\lambda+\mu}$ dan $P_1=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$

maka persamaan (2.10.) dan (2.11.) untuk nilai $t\to\infty$ akan menghasilkan :

$$P_0(t)=\frac{\mu}{\lambda+\mu} \qquad \text{dan} \qquad P_1(t)=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

terlihat bahwa probabilitasnya adalah konstan (tetap), dan jika persamaan (2.6.) dan (2.7.) diambil nilai limitnya maka akan diperoeh :

$$\lim_{t\to\infty}\frac{d}{dt}P_0(t)=\mu\lim_{t\to\infty}P_1(t)-\lambda\lim_{t\to\infty}P_0(t)=\mu\frac{\lambda}{\lambda+\mu}-\lambda\frac{\mu}{\lambda+\mu}=0$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{d}{dt}P_1(t)=\lambda\lim_{t\to\infty}P_0(t)-\mu\lim_{t\to\infty}P_1(t)=\lambda\frac{\mu}{\lambda+\mu}-\mu\frac{\lambda}{\lambda+\mu}=0$$

sehingga dapat disimpulkan bahwa :

$$\lim_{t\to\infty}P_n(t)=P_n \qquad \text{dan} \qquad \lim_{t\to\infty}\frac{d}{dt}P_n(t)=0$$

sehingga diperoleh

$$\lim_{t\to\infty}\frac{d}{dt}P_0(t)=\mu\lim_{t\to\infty}P_1(t)-\lambda\lim_{t\to\infty}P_0(t)=\mu P_1-\lambda P_0=0 \qquad \text{dan}$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{d}{dt}P_1(t)=\lambda\lim_{t\to\infty}P_0(t)-\mu\lim_{t\to\infty}P_1(t)=\lambda P_0-\mu P_1=0 \text{ , sehingga}$$

$P_1=\frac{\lambda}{\mu}P_0$, karena yang dipandang adalah state E_0 dan E_1 maka $P_1=\frac{\lambda_0}{\mu_1}P_0$,

dengan cara analog akan didapatkan

$P_2=\frac{\lambda_1}{\mu_2}P_1$ atau $P_2=\frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1\mu}P_0$ dengan cara yang sama juga akan diadapatkan nilai dari P_n, yaitu :

$$P_n=\frac{\lambda_0\lambda_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu \quad \ldots\ldots\mu_n}P_0=\frac{\prod_{i=0}^{n-1}\lambda_i}{\prod_{i=1}^{n}\mu_i}P_0 \qquad \ldots\ldots(2.14.)$$